

№ 59 Дзюбс 31.08.2020 (Уровень: Базовый)

Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наименьшего натурального числа A формула $(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 24) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 16)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, A)$ тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Ответ: 16

№ 432 Дзюбс 05.10.2020 (Уровень: Средний)

Обозначим как $\text{ДЕЛ}(x, A)$ утверждение, что целое число x делится на A без остатка. Для приведенного ниже выражения укажите минимальное натуральное A , при котором выражение

$(\neg \text{ДЕЛ}(x, 84) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 90)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, A)$ будет истинно для любого x .

Ответ: 1260

№ 764 (Уровень: Базовый)

Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на m ». Для какого наименьшего натурального числа A формула $(\text{ДЕЛ}(x, 15) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 21)) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 15))$ тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Ответ: 7

№ 948 (Уровень: Базовый)

Обозначим через $\text{mod}(m, n)$ остаток от деления m на n . Для какого наименьшего натурального числа A формула

$$((\text{mod}(x, 4) \neq 3) \vee (\text{mod}(x, 6) \neq 1)) \rightarrow (\text{mod}(x, 36) \neq A)$$

тождественно истинна при любых целых положительных x ?

Ответ: 7

№ 1127 (Уровень: Базовый)

Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наименьшего натурального числа A формула $\text{ДЕЛ}(A, 7) \wedge (\text{ДЕЛ}(240, x) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(A, x) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(780, x)))$ тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Ответ: 420

№ 216 Дзюбс 14.09.2020 (Уровень: Базовый)

Обозначим через $m \& n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n . Так, например, $14 \& 5 = 1110_2 \& 0101_2 = 0100_2 = 4$. Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение

$$((x \& 26 \neq 0) \vee (x \& 13 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 29 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Ответ: 2

№ 2078 (Уровень: Базовый)

(М.В. Кузнецова) Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наибольшее натуральное число A , такое что выражение

$$((X \& 13 \neq 0) \vee (X \& A \neq 0)) \rightarrow (X \& 13 \neq 0) \vee ((X \& A \neq 0) \wedge (X \& 39 = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

Ответ: 13

№ 2079 (Уровень: Базовый)

Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение

$$(X \& 107 = 0) \rightarrow ((X \& 55 \neq 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

Ответ: 20

№ 2081 (Уровень: Средний)

Пусть P – множество всех 8-битовых цепочек, начинающихся с 11, Q – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 0, а A – некоторое множество произвольных 8-битовых цепочек. Сколько элементов содержит минимальное множество A , при котором для любой 8-битовой цепочки x истинно выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \vee \neg(x \in Q))$$

Ответ: 96

№ 2081 (Уровень: Средний)

Пусть P – множество всех 8-битовых цепочек, начинающихся с 11, Q – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 0, а A – некоторое множество произвольных 8-битовых цепочек. Сколько элементов содержит минимальное множество A , при котором для любой 8-битовой цепочки x истинно выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \vee \neg(x \in Q))$$

Ответ: 96

№ 1015 100 базовых задач Е. Джобс (Уровень: Базовый)

Для какого наименьшего целого значения параметра A существует выражение

$$(x > 39) \vee (y > 26) \vee (2x + 4y < A)$$

является тождественно истинным, то есть принимает значение 1 при любых целых положительных значениях переменных x и y .

Ответ: 183

№ 1859 Основная волна 2021 (Уровень: Базовый)

Найдите максимальное значение параметра A , при котором выражение

$$(2x + y \neq 70) \vee (x < y) \vee (A < x)$$

истинно (т.е. принимает значение 1) при любых неотрицательных значениях x и y .

Ответ: 23

№ 2080 (Уровень: Базовый)

Для какого наименьшего целого неотрицательного числа A выражение

$$(x^2 - 10x + 16 > 0) \vee (y^2 - 10y + 21 > 0) \vee (xy < 2A)$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых положительных x и y ?

Ответ: 29

№ 743 (Уровень: Средний)

Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$((x \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}) \rightarrow \neg(x \in \{3, 6, 9, 12\})) \vee (x \in A)$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x . Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A .

Ответ: 12

№ 752 (Уровень: Средний)

Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(\neg(x \in A) \wedge (x \in \{3, 6, 9, 12\})) \vee \neg(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x . Определите наименьшее возможное количество элементов множества A .

Ответ: 2

№ 754 (Уровень: Средний)

Элементами множеств A , P и Q являются натуральные числа, причём $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ и $Q = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$. Известно, что выражение

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \wedge ((x \in Q) \rightarrow \neg(x \in A))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x . Определите наибольшее возможное количество элементов множества A .

Ответ: 8

№ 1409 (Уровень: Средний)

Элементами множеств A , P , Q , R являются натуральные числа, причём

$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, $Q = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$, $R = \{12, 24, 36, 48, 60\}$. Известно, что выражение

$$(x \in A) \rightarrow (((x \in P) \wedge (x \in Q)) \rightarrow (x \in R))$$

истинно (т.е. принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x).

Определите наименьшее возможное произведение элементов в множестве A .

Ответ: 108

№ 1968 Демоверсия 2022 (Уровень: Средний)

На числовой прямой даны два отрезка: $D = [17; 58]$ и $C = [29; 80]$. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A , для которого логическое выражение

$$(x \in D) \rightarrow ((\neg(x \in C) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in D))$$

истинно (т.е. принимает значение 1) при любом значении переменной x .

Ответ: 12

№ 1295 Открытый вариант КЕГЭ (Уровень: Средний)

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [17; 54]$ и $Q = [37; 83]$. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A , что логическое выражение

$$(x \in P) \rightarrow (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P))$$

истинно (т.е. принимает значение 1) при любом значении переменной x .

Ответ: 17

№ 1198 Апробация 27.04 (Уровень: Средний)

На числовой прямой даны два отрезка: $B = [18; 52]$ и $C = [16; 41]$. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A , что логическое выражение

$$((x \in B) \rightarrow (x \in A)) \wedge (\neg(x \in C) \vee (x \in A))$$

истинно (т.е. принимает значение 1) при любом значении переменной x .

Ответ: 36

№ 14950 (Уровень: Средний)

(PRO100 ЕГЭ) Обозначим через $\text{НОД}(n, m, k)$ утверждение «наибольший делитель чисел n и m равен k ». Сколько существует натуральных значений A на отрезке $[1; 1000]$, при которых формула

$$\text{НОД}(A, 420, 2) \vee (\neg \text{НОД}(A, x, 12) \rightarrow \neg \text{НОД}(110, x, 11))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Ответ: 115

№ 14658 Открытый курс "Слово пацана" (Уровень: Средний)

(М. Попков) Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наименьшего натурального числа A формула $(\text{ДЕЛ}(x, 12) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 42)) \vee (x + A \geq 4096)$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Ответ: 4012

№ 14353 (Уровень: Средний)

(Л. Шагин) Обозначим через ТРЕУГ(n, m, k) утверждение «существует невырожденный треугольник с длинами сторон n, m и k ». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\text{ТРЕУГ}(A, 7, x) \rightarrow ((\text{МАКС}(x+5, 14) \leq 27) \equiv \neg \text{ТРЕУГ}(36, 21, x))$$

тождественно истинна (т.е. принимает значение 1) при любом натуральном значении переменной x ?

Примечание. $\text{МАКС}(a, b) = a$, если $a > b$, и $\text{МАКС}(a, b) = b$, если $a \leq b$.

Ответ: 50

№ 11845 (Уровень: Сложный)

(С. Чайкин) Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Сколько существует натуральных значений A на отрезке $[1; 11111]$, для которых выражение

$$(\text{ДЕЛ}(A, x) \rightarrow (x \equiv A) \vee (x \equiv 1)) \forall x \in \mathbb{N}$$

тождественно истинно (т. е. принимает значение 1)?

Ответ: 1346

Заметим, что выражение будет истинно, если число будет равно единице или будет простым

```
def f(x):
```

```
    return all(x % d for d in range(2, int(x**0.5)+1))
```

```
# Найдем количество подходящих значений A
```

```
count = sum(f(a) for a in range(1, 11_111+1))
```

```
print(count)
```